Cristian Calude : « Des probabilités pour comprendre le problème de l'arrêt »

INFORMATIQUE THÉORIQUE

Peut-on savoir si un programme donné va s'arrêter ou non ? Pour aller plus loin que le résultat fondateur d'Alan Turing en 1936, les mathématiciens intègrent la théorie des probabilités.

Qu'appelle-t-on problème de l'arrêt ?

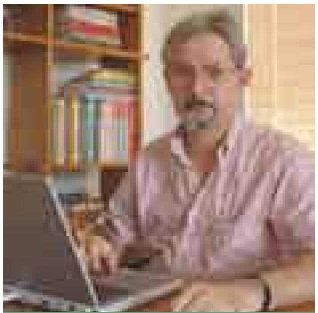
CRISTIAN CALUDE : Il s'agit de savoir s'il peut exister un « logiciel » (on parle de « machine de Turing ») qui, chaque fois qu'on lui montre un programme, indique si celui-ci, une fois lancé, finit ou non par s'arrêter. Considérons par exemple le programme qui regarde les nombres pairs les uns après les autres et ne s'arrête que s'il tombe sur un nombre pair qui ne s'écrit pas comme somme de deux nombres premiers. Si l'on pouvait savoir à l'avance que ce programme va ou non s'arrêter, alors on aurait du même coup la réponse à la question de savoir si tout nombre entier est somme de deux premiers, une question posée par Christian Goldbach il y a 250 ans et toujours non résolue…

En 1936, Alan Turing a montré que le problème de l'arrêt est « indécidable » : un tel logiciel ne peut pas exister. Il fallut donc chercher dans une nouvelle direction.

Et cette nouvelle direction fut donnée par les probabilités ?

En 1975, Gregory Chaitin s'est interrogé sur la probabilité qu'un programme aléatoirement construit (et auquel on entre des données elles-mêmes aléatoires) s'arrête ou non. Cette probabilité porte le nom de constante de Chaitin [1]. Ses décimales sont « aléatoires » au sens algorithmique du terme : aucun algorithme ne pourra jamais leur trouver une quelconque structure.

Récemment, on s'est intéressé au fait qu'un programme défini par une suite de n bits (des 0 et des 1) a beaucoup de chances de s'arrêter au bout d'un temps qui dépend de n (on peut montrer que ce temps est de 2^n). En effet, la complexité d'un programme est limitée par sa taille, et ce sont en général les programmes les plus complexes qui mettent le plus de temps à s'arrêter.



CRISTIAN CALUDE est professeur à l'université d'Auckland. © DR

Quelles sont les retombées potentielles de telles questions ?

Elles concernent notamment une version du théorème d'incomplétude de Gödel en termes de complexité. Par exemple, en 2005, avec Helmut Juergensen, nous avons quantifié en quoi les théorèmes accessibles à une théorie donnée sont limités par la complexité de la théorie en question [2]. La probabilité qu'un énoncé soit démontrable au sein d'une théorie donné est de plus en plus faible à mesure que cet énoncé est long, même si les chances sont réelles que cet énoncé soit vrai.

Propos recueillis par Benoît Rittaud

[1] G. Chaitin, *Metal Math !*, *Pantheon*, 2005.
[2] C. Calude et H. Juergensen, *Advances in Applied Mathematics*, 35, 1, 2005.

Inévitables éclipses ?

Isolez trois masses du reste de l'Univers et regardez l'évolution de leurs positions induite par l'attraction gravitationnelle : décrire les orbites possibles est un problème extraordinairement compliqué, sur lequel les spécialistes sont loin d'avoir tout dit.

Une configuration possible, découverte par Joseph-Louis Lagrange en 1772, est celle où, à tout instant, les trois corps forment un triangle équilatéral, qui tourne sur lui-même tout en se rétrécissant jusqu'à la collision finale. Dans cette configuration, aucun des trois corps n'éclipse l'un des autres aux yeux du troisième. Richard Montgomery, de l'université de Santa Cruz, vient de démontrer que la configuration de Lagrange est la seule à disposer de cette propriété : pour toutes les autres, il y a au moins un instant où une éclipse se produit, celle-ci pouvant éventuellement prendre la forme d'une collision entre deux des trois corps.

© SPL/COSMOS

➲ R. Montgomery, http://fr.arxiv.org/abs/math.DS/0601269, 2006.

LIVRES

Bernadette Guéritte-Hess, Isabelle Causse-Mergui et Marie-Céline Romier
LES MATHS À TOUTES LES SAUCES
Le Pommier, 2005, 379 p., 23 €.

La cuisine, haut lieu de l'apprentissage des mathématiques ? C'est l'idée inattendue développée dans ce livre écrit par des spécialistes en rééducation logico-mathématique, pour qui le fait de mesurer ou de peser permet au jeune enfant de s'approprier l'idée de nombre et l'abstraction qui l'accompagne. L'ouvrage aborde des questions comme la représentation décimale, l'idée de classement, ou encore les joies et les mystères du système métrique.

AGENDA

[Le 15 mars à 18 h 30]
HENRI POINCARÉ ET LE MONDE NON EUCLIDIEN

En 1902, Poincaré imagine des êtres vivant dans un disque sur lequel, à mesure que l'on avance, il est de plus en plus difficile de s'approcher du bord. La géométrie sous-jacente, dite « hyperbolique », est aujourd'hui un domaine de recherche particulièrement actif. Elle sera l'objet de cette conférence du cycle « Un texte, un mathématicien », présentée par Étienne Ghys, de l'école normale supérieure de Lyon.

Paris, Bibliothèque nationale de France.
01 44 27 67 96

[Le 18 mars à 10 h 30]
L'INFINI PLURIEL DE LA MATHÉMATIQUE

Une rencontre avec le chercheur Jean-Paul Delahaye, organisée avec le Collège international de philosophie dans le cadre du cycle de conférences « Science et philosophie » de la Cité des sciences et de l'industrie.

Paris, Cité des sciences et de l'industrie.
01 40 05 35 96

WEB

http://projecteuclid.org

Le projet Euclide, hébergé par l'université Cornell, est une initiative pour faciliter l'accès à des articles de mathématiques et de statistiques.