COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PUBLIÉS

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

EN DATE DU 13 JUILLET 1835

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS

TOME DEUX CENT QUATRE-VINGT-QUATRIÈME

SÉRIE A : SCIENCES MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PARTIE : MARS-AVRIL 1977

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

1977

NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Une construction grammaticale des codages de Gödel.*

Note (*) de **Cristian Calude**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On présente une méthode « grammaticale » de construction des codages de Gödel pour l'ensemble des langages récursivement énumérables définies sur X [abrégé, $\mathscr{L}$ (X)] et pour les ensembles des relations et des semi-fonctions récursives définies sur X*.

Let X *and* Y *be two finite, disjoint and non-empty sets,* $V = X \cup Y$ *and* P *a finite subset of* $V^* YV^* \times V^*$. *Let* W *be a function from* $\mathscr{L}$ (X) *(the set of recursively enumerable languages on* X*) to* V*. *The system* (X, Y, W, P) *is called a universal grammar if any language* $L \in \mathscr{L}$ (X) *is generated by the type* 0 *grammar* (X, Y, W (L), P). *A universal grammar is obtained, which induces Gödel numberings for* $\mathscr{L}$ (X) *and for the sets of recursive relations and functions defined on* X*.

Soit X un ensemble fini et non vide; X* est le monoïde libre engendré par X, avec e le mot nul.

Toutes les grammaires qui apparaissent dans la suite sont des grammaires de type 0 au sens de Chomsky ([1]) et elles ont X comme alphabet terminal. Toutes les grammaires universelles qui seront utilisées, sont définies pour $\mathscr{L}$ (X).

THÉORÈME 1. — *Il existe un codage de Gödel pour l'ensemble des grammaires.*

Indication de démonstration. — On utilise la méthode de Gödel, c'est-à-dire on emploie d'une manière systématique la suite des nombres premiers.

Soient Y un ensemble fini, non vide et disjoint de X, $V = X \cup Y$ et P une partie finie du produit $V^* YV^* \times V^*$. Soit w une application de $\mathscr{L}$ (X) dans V*. Le système (X, Y, w, P) est *une grammaire universelle* si chaque langage $L \in \mathscr{L}$ (X) est engendré par la grammaire (X, Y, w (L), P).

THÉORÈME 2 (en collaboration avec G. Păun). — *Il existe une grammaire universelle.*

Esquisse de démonstration. — Posons $Z = X \cup \{S, U, W\}$ et $Y = \{A, B, C, D, E, F, H, R, S, T, U, W\} \cup X \times \{1, 2, \ldots, 9\}$. P est formé par les règles suivantes (leur application se fait dans le même ordre) :

$C \to BT$; $Tx \to xT$, $(x \in Z \cup \{D, E\})$; $TDx \to (x, 2)\,D\,(x, 1)$, $(x \in Z)$; $y\,(x, 2) \to (x, 2)\,y$, $(x \in Z,\ y \in Z \cup \{D, E\})$; $B\,(x, 2) \to (x, 3)\,B$, $(x \in Z)$; $y\,(x, 3) \to (x, 3)\,y$, $(x, y \in Z)$; $x\,(x, 3) \to (x, 4)$, $(x \in Z)$; $(x, 1) \to (y, 5)\,(x, 1)\,(y, 1)$, $(x, y \in Z)$; $x\,(y, 5) \to (y, 5)\,x$, $(y \in Z,\ x \in Z \cup \{D, E\})$; $B\,(y, 5) \to (y, 6)\,B$, $(y \in Z)$; $x\,(y, 6) \to (y, 6)\,x$, $(x, y \in Z)$; $(x, 4)\,y\,(y, 6) \to (x, 4)$, $(x, y \in Z)$; $(x, 1)\,E\,y \to (x, 7)\,E\,(y, 9)$, $(x, y \in Z)$; $(x, 1)\,(y, 7) \to (x, 7)\,y$, $(x, y \in Z)$; $D\,(x, 7) \to Dx$, $(x \in Z)$; $(x, 9)\,y \to (y, 8)\,(x, 9)\,(y, 9)$, $(x, y \in Z)$; $x\,(y, 8) \to (y, 8)\,x$, $(y \in Z,\ x \in Z \cup \{D, E, B\})$; $(x, 9)\,(y, 8) \to (y, 8)\,(x, 9)$, $(x, y \in Z)$; $(x, 4)\,(y, 8) \to y\,(x, 4)$, $(x, y \in Z)$; $(x, 1)\,ED \to (x, 7)\,RED$, $(x \in Z)$; $(x, 9)\,D \to RxD$, $(x \in Z)$; $(x, 9)\,R \to Rx$, $(x \in Z)$; $xR \to Rx$, $(x \in Z \cup \{D, E\})$; $BR \to RC$; $(x, 4)\,R \to e$, $(x \in Z)$; $Ax \to xA$, $(x \in X)$; $AC \to H$; $Hx \to H$, $(x \in Z \cup \{D, E\})$; $HF \to e$.

On peut montrer que le système défini ci-dessus est une grammaire universelle.

CORROLAIRE. — *Toute grammaire universelle induit un codage de Gödel pour* $\mathscr{L}$ (X).

Démonstration, — A chaque entier positif n on associe le langage L_n engendré par la grammaire (X, Y, $a(n)$, P), où a est une bijection récursive primitive définie sur l'ensemble des entiers positifs à valeurs dans V* (2).

THÉORÈME 3. — *Toute grammaire universelle induit un codage de Gödel pour l'ensemble des relations récursives définies sur* X*.

Démonstration. — Considérons les fonctions récursives $f : (X^*)^2 \to X^*$, g, $h : X^* \to X^*$ telles que $f(g(z), h(z)) = z$, $g(f(x, y)) = x$ et $h\ (f(x, y)) = y$ (3). A tout entier positif n on associe la relation dont le graphe est l'ensemble $t_n = \{ (g(x), h(x))/x \in L_n \}$. Le théorème est une conséquence de la caractérisation des relations récursives (4).

Un codage de Gödel c pour l'ensemble des semi-fonctions récursives est optimal au sens de Schnorr (5) si tout autre codage peut être obtenu de c utilisant une fonction linéairement bornée.

THÉORÈME 4. — *Toute grammaire universelle induit un codage de Gödel optimal pour l'ensemble des semi-fonctions récursives définies sur* X*.

Démonstration. — Si l'ensemble t_n défini ci-dessus est le graphe d'une semi-fonction f, alors on associe à l'entier positif n la semi-fonction f ; dans le cas contraire, on lui associe l'identité de X*. En vertu du théorème du graphe (6), la semi-fonction f est récursive, donc, en tenant compte de l'esquisse de démonstration du théorème 2, on déduit que le codage construit est optimal.

(*) Séance du 3 janvier 1977.

(1) A. SALOMAA, *Formal Languages*, Academic Press, New York, 1973, p. 15.
(2) S. EILENBERG et C. C. ELGOT, *Recursiveness*, Academic Press, New York, 1970, p. 32.
(3) W. BRAINERD et L. LANDWEBER, *Theory of Computation*, John-Wiley, 1974, p. 74.
(4) *Voir* (2) p. 40.
(5) C. P. SCHNORR, *Math. Systems Theory.*, 4, 1975, p. 183.
(6) *Voir* (2) p. 65.

Universitatea din Bucuresti,
Sectia de studiul sistemelor,
Str. M. Moxa Nr. 3-5,
Sector 8,
78109 *Bucuresti,*
Romania.