

Un Siglo de Controversia Sobre los Fundamentos de la Matemática ¹

Muchas gracias Manuel!. Es un gran placer estar aquí!

Estamos en un estado de euforia ahora en el negocio de la computación porque las cosas están yendo tan bien: la web, el comercio electrónico. Todo esto esta pagando nuestros salarios, y es un buen momento para estar alrededor, cuando las cosas están saliendo tan bien. Pero me gustaría hacer una afirmación atrevida, que tiene una pequeña parte de verdad, que todo esto que esta pasando ahora con el computador tomando el mundo, la digitalización de nuestra sociedad, de la información en la sociedad humana, ustedes podrían decir que en una forma es el resultado de una pregunta filosófica que fue planteada por David Hilbert al comienzo de este siglo.

No es una completa mentira decir que Turing inventó el computador a fin de dar luz a una pregunta filosófica acerca de los fundamentos de la matemática que fue formulada por Hilbert. Y en una forma divertida eso condujo a la creación del negocio de los computadores.

Esto no es completamente cierto, pero hay cierta verdad. Ustedes saben, la mayoría de afirmaciones historias son una mentira, así que esta no es mucho peor que la mayoría de las otras!

Así que me gustaría explicar la historia filosófica del computador. En una forma que pasó, y les diré mas, es que Hilbert dijo que deberíamos formalizar toda la matemática, el razonamiento matemático. Y esto falló, les tocó a Gödel y a Turing demostrar que no podría llevarse a cabo. Falló en ese sentido técnicamente preciso. Pero de hecho tuvo éxito magníficamente, no la formalización del razonamiento, sino la formalización de los algoritmos ha sido el gran éxito tecnológico de nuestros tiempos – lenguajes de programación de computadores!

Así que si usted mira atrás a la historia del comienzo de este siglo vera artículos de lógicos estudiando los fundamentos de las matemáticas en los cuales tenían lenguajes de Programación. Ahora usted mira atrás y puede decir que esto es claramente un lenguaje de programación! Si usted mira al articulo de Turing por supuesto que hay un lenguaje de máquina. Si lee artículos de Alonzo Church se encuentra con el calculo lambda, que es un lenguaje de programación funcional. Si mira el articulo original de Gödel se ve lo que a mi me parece como LISP, es muy cercano a LISP, el articulo implora ser reescrito en LISP!

Así que me gustaría darles esta historia filosófica oculta de la tecnología de la computación que es como matemáticos con perspectivas filosóficas trataron de resolver de una vez por todas todos los problemas fundamentales de la

¹G.J. Chaitin 2 de marzo del 2000 Conferencia Distinguida de la Escuela de Ciencias de la Computación Universidad Carnegie Melon. El conferenciante fue introducido por Manuel Blum, la charla fue grabada en video, esta es una transcripción editada

matemática y no tuvieron éxito pero ayudaron a crear la tecnología de la computación como un subproducto. Esta fue la falla de este proyecto! Todos Nosotros estamos beneficiándonos de esta gloriosa falla!

Sin embargo este proyecto no ha muerto completamente – voy a empezar mas sistemáticamente desde el comienzo; pero estoy intentando dar una introducción. – Es popular pensar, bien Gödel hizo esta maravillosa cosa en 1931 y Turing agregó un poco de profundo material en 1936, pero el mundo se ha movido desde ese punto. Y lo que me gustaría hacer es decirles que de hecho yo he realizado algo mas de trabajo en esta área.

Ustedes pueden pensar que esto esta descaminado. La mayoría del mundo ha encogido los hombros y ha dicho, y que? Los matemáticos se fueron, ignorando esto. Y mi desgracia o fortuna fue que no deseaba encoger los hombros. Dije, quiero entender esto mejor. Y voy a contarles la historia de mi intento de entender la incompletitud de Gödel – Es un problema psicológico que un buen siquiatra podría haberme curado, y entonces no habría hecho nada de este trabajo!

Así que déjenme empezar por el comienzo y contarles esta historia de cien años de intensa preocupación, crisis, duda, autoexaminación y angustia sobre la filosofía de la matemática.

Han habido muchas crisis en la historia de la matemática. La matemática no es placida, estática y eterna.

Una de las primeras crisis fue el resultado Pitagórico de que la raíz de dos es **irracional**. Y el hecho de que esto fue una crisis sobrevive en la palabra "irracional". Recuerde que los Griegos pensaban que la racionalidad era la meta suprema – Platón! Razón! Si un número es nombrado irracional esto significa que este era el teorema de incompletitud de Gödel de la antigua Grecia. Así que había una crisis ahí.

Otra crisis fue causada por el cálculo. Mucha gente dijo esto es necedad, estamos hablando sobre infinitesimales, que es esto? El arzobispo Berkeley fue un teólogo y dijo, los matemáticos puros tienen tan poco sentido como los teólogos, ustedes no pueden rechazarnos diciendo que **nosotros somos** irrazonables. La forma en que ustedes tratan las cantidades evanescentes en el cálculo – esto fue antes de que el cálculo contara con una fundamentación rigurosa – es tan mala como nuestras discusiones teológicas! Así que en ese tiempo era bastante malo!

Entonces hubo una crisis acerca del postulado de las paralelas, acerca de las geometrías no euclideas.

Así que la matemática no es estática y eterna!

Pero la crisis particular que deseo contarles se remonta atrás a un poco mas de cien años al trabajo de Cantor sobre la teoría de conjuntos.

Cantor: Teoría de los Conjuntos **infinitos**

Así que mi charla es muy impráctica. Todos sabemos que ustedes pueden tener una nueva compañía y hacer un millón de dólares si tienen suerte con la web. Así que esto es acerca de como no hacer dinero con la web. Esto es acerca de como arruinar su carrera pensando en filosofía.

Así que Cantor estaba obsesionado con la noción del infinito, y no se menciona que era así porque estaba interesado en teología y en Dios, lo cual es editado de los recuentos ahora, pero era la idea original.

Y Cantor tenía la idea de que si usted tiene 1,2,3,... porque parar ahí?

1,2,3,... ω

- Les estoy dando una versión de cartón de la teoría de Cantor de los conjuntos infinitos. - Usted coloca un omega, ω , esta es una letra griega, la última letra del alfabeto Griego en minúscula, esa es la razón para escogerla. Así que usted solo dice, voy a poner otro número aquí en vez de parar con 1,2,3,... Este va a ser el primer número después de todos los números finitos. Este es el primer número transfinito. Usted puede seguir por un momento.

1,2,3,... ω , $\omega + 1$, $\omega + 2$,...

Y entonces usted tiene otra cosa como una copia de 1,2,3,... ω , $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$... Estos son nombres. Y entonces usted dice, por que parar aquí? Voy a poner algo después de todo esto, así que 2ω , $2\omega + 1$, $+2$, $+3$, entonces después 3ω , 4ω Bien, ¿que viene después de todo eso? ¿Por que parar ahí? Así, ω cuadrado, obviamente.

1,2,3,... ω , $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... 2ω 3ω 4ω ω^2

Entonces usted puede seguir. $5\omega^2 + 8\omega + 96!$. Y entonces mucho después usted obtiene ω al cubo!. Y entonces eventualmente ω a la cuatro. Usted continua y ¿por que parar ahí?. Esta secuencia sigue para siempre, pero pongamos algo después de todo eso. ¿Que sería? Obviamente sería ω a la ω . Esto esta empezando a ponerse interesante! Entonces usted continua y ya tiene ω a la ω a la ω . Este ya es un número bastante alejado!

1,2,3,... ω , $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... 2ω 3ω 4ω ω^2 ω^3 ω^4 ω^ω ω^{ω^ω}

Usted puede ver porque esto se va haciendo teológico. Este es el equivalente matemático de una adicción a las drogas. En vez de elevarse con alcohol o hierba usted se eleva con ideas como estas. Después de un poco ya no sabe donde está o que esta pasando!

Entonces el próximo número es ω a la ω a la ω por siempre

$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}}$

Este número es la menor solución a la ecuación

$$x = \omega^x$$

Y es llamado ϵ_0 , epsilon sin ningún motivo, no se por qué. Porque usted empieza a tener problemas con el nombramiento de las cosas, porque hasta aquí estaba usando notación normal algebraica solo con ω .

De cualquier forma usted puede ver que esto es material fantástico!. No se si es matemática, pero es muy imaginativo, es muy bonito, y realmente hay una gran ganancia de matemática pura en lo que Cantor estaba haciendo.

Algunas personas veían la teoría de conjuntos como a una enfermedad. Poincaré el gran matemático Francés dijo la teoría de conjuntos es una enfermedad, de la cual espero se recuperaran las generaciones futuras. Pero otras personas rehicieron toda la matemática usando el enfoque de la teoría de conjuntos, con preguntas generalizadas.

La matemática del siglo diecinueve estaba en un nivel mas bajo en algunas formas, mas implicada con casos especiales y formulas. La matemática del siglo veinte – es difícil escribir una historia de la matemática desde el año diez mil mirando hacia atrás porque estamos exactamente aquí – pero usted podría decir que la matemática del siglo veinte es teórico-conjuntista, “estructural” seria una forma de llamarla. La matemática del siglo diecinueve esta preocupada por formulas, series infinitas de Taylor quizás. Pero la matemática del siglo veinte pasó a un nivel teórico-conjuntista de abstracción.

Y en parte eso es debido a Cantor, y alguna gente lo odia diciendo que él arruinó y destrozó la matemática tomándola en una forma concreta y haciéndola floja, por ejemplo, desde el análisis duro al análisis abstracto. Otra gente amaba esto. Era muy controversial.

Era muy controversial, y lo que no ayudaba era que de hecho existían algunas contradicciones. Se convirtió en mas que solo un asunto de opinión. Habían casos en los que usted se metía en terribles problemas, obteniendo obvios sin sentidos. Y el lugar en el que usted obtiene un obvio sin sentido de hecho es un teorema de Cantor que dice que para cada conjunto infinito hay un conjunto infinito mas grande que es el conjunto de todos sus subconjuntos, lo cual suena bien razonable. Este es el argumento diagonal de Cantor – No tengo tiempo de darles los detalles.

Así el problema es que si usted cree que para cada conjunto infinito hay un conjunto infinito mas grande, que pasa si usted aplica esto al conjunto universal, el conjunto de todo? El problema es que por definición el conjunto de todo tiene todo y este método supuestamente le daría un conjunto mas grande, el conjunto de todos los subconjuntos de todo. Así que aquí tiene que haber un problema, y el problema fue notado por Bertrand Russell.

Bertrand Russell

Creo que Cantor puede haberlo notado, pero Bertrand Russell se fue por ahí contándole a todo el mundo acerca de esto, dándole la mala noticia a todos! – Al menos Gödel le atribuye a Russell el reconocer que había una seria crisis.

El desastre que Russell notó en esta prueba de Cantor fue el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de si mismos, lo que resulta ser un paso crucial en la demostración. Y el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de si mismos suena como una forma razonable de definir un conjunto, pero si usted pregunta si esta incluido en si mismo o no, cualquier respuesta que asuma obtendrá la opuesta, es una contradicción, es como decir esta frase

es falsa. El conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de si mismos esta contenido en si mismo si y solo si no esta contenido en si mismo.

Así que esto significa que algunas formas de definir conjuntos son malas, o que el conjunto universal nos mete en problemas? Que hay de malo con el conjunto de todo? Así que ahí hay un problema con la teoría de conjuntos – que se hizo mucho mas claro. Creo que Russell ayudó a que fuera reconocido por todo el mundo que teníamos una seria crisis y que los métodos de razonamiento que a primera vista parecían perfectamente legítimos en algunos casos conducían al obvio desastre, a contradicciones. Había un manojo completo de paradojas que Russell anunció: la paradoja de Berry, la que yo mencioné se llama paradoja de Russell, y hay otra, la paradoja de Burali-Forti.

Muchas de estas paradojas de hecho fueron realmente llevadas a la atención del mundo por Russell. Russell típicamente tendría un pie de página diciendo que esta paradoja se me ocurrió mientras estaba leyendo un articulo de Burali-Forti, así que todos la llaman paradoja de Burali-Forti. Creo que Burali-Forti paso su vida entera tratando de disminuir esta atribución porque el no creía que la matemática estaba en problemas!

Okey, así que había una crisis, y creo que Russell fue una de las figuras claves en esto. En este punto David Hilbert viene al rescate.

David Hilbert

David Hilbert era un matemático muy importante alrededor del cambio de siglo. No como a Poincaré, un matemático Francés muy importante – Hilbert era un matemático Alemán muy importante – a Hilbert le gustaba la teoría de conjuntos. A el le gustaba este enfoque abstracto Cantoriano. Y Hilbert tuvo la idea de resolver de una vez y por todas estos problemas. Como iba a hacerlo?

La forma en que Hilbert iba a hacerlo es usando el método axiomático, el cual por supuesto viene desde Euclides – Hilbert no inventó esto. Pero el hizo un significativo paso adelante.

Hilbert: Método **Formal** Axiomático

Hilbert dijo usemos toda la tecnología de la lógica simbólica, la cual un montón de gente esta inventando, y vamos a un extremo final. Porque una de las razones por las que usted se mete en problemas y obtiene contradicciones en matemática con la teoría de conjuntos es porque las palabras son muy vagas. Lo que deseamos hacer para deshacernos de todos estos problemas en la matemática y en el razonamiento es deshacernos de los pronombres por ejemplo, usted no sabe a que se refieren los pronombres. Y hay toda clase de cosas que son vagas en el lenguaje natural.

Hilbert dijo que la forma de deshacernos de todos esos problemas es desarrollar un conjunto finito de axiomas y un lenguaje artificial para hacer matemática – esta es la idea del formalismo llevada al límite.

Formalismo

Lleve el formalismo al límite absoluto e invente un lenguaje completamente artificial con reglas de juego completamente precisas – gramática artificial y todo – y elimine todos estos problemas, como el problema que Russell tenía. Este era un programa ambicioso para poner la matemática de una vez por todas en una base firme.

Y una cosa que Hilbert enfatizó, que hasta lo que se es una contribución clave que hizo él mismo, es que deseaba que las reglas de juego de este sistema formal axiomático para toda la matemática fueran tan precisas que se tendría un demostrador mecánico de teoremas. Así es completamente verdadero y objetivo y mecánico si una demostración obedece las reglas o no. No debería haber elemento humano, no debería haber elemento subjetivo, no debería haber lugar a las interpretaciones. Si alguien afirma que tiene una demostración, debería ser absolutamente claro, mecánico, chequear y ver si obedece las reglas y si usted probó un teorema o si tiene un error.

Esta es la idea de que la matemática debería ser absolutamente blanca o negra, precisa, verdad absoluta. Esta es la noción tradicional de matemática.

Blanco o Negro

El mundo real que conocemos es un absoluto desorden – cierto? – todo es complicado y enredado. Pero el único lugar donde las cosas deberían ser absolutamente claras, blanco o negro, es en la matemática pura.

Esta es la clase de afirmación que Hilbert estaba haciendo, y el propuso esto como una meta, tener esta formalización de toda la matemática y eliminar todos los problemas. Ahora esto era un programa, no era algo que usted haría en un fin de semana. Hilbert propuso esto como una meta para poner a la matemática en una base firme. El y un grupo de colaboradores muy brillantes, incluyendo a John von Neumann, empezaron a trabajar en esto, y por un lapso de treinta años, lucía alentador. Y entonces – este es un rápido resumen de un siglo de trabajo – entonces estoy seguro que todos ustedes saben que habían unos pocos pequeños problemas!

Los problemas son 1931, Kurt Gödel y 1936, Alan Turing.

1931 Gödel
1936 Turing

Ellos demostraron que no podría hacerse, que habían obstáculos fundamentales para formalizar toda la matemática y hacerla absolutamente blanca o negra y absolutamente cristalina. Recuerden que Hilbert esta proponiendo que deberíamos formalizar toda la matemática de tal forma que todos en el planeta tierra pueden estar de acuerdo en que una demostración es correcta o incorrecta. Las reglas del juego deberían ser absolutamente explícitas, debería ser un lenguaje artificial y entonces la matemática les daría **verdad absoluta**. “Verdad Absoluta” debería ser subrayada en una hermosa letra y usted debería oír los ángeles cantando cuando pronuncia estas palabras!. Este era el pensamiento de que nosotros los matemáticos tenemos verdad absoluta. Es nuestra – nadie mas la tiene, solo nosotros! Esta era la idea.

Así que resulta que esto no funciona completamente. Por que no funciona?

Gödel sacudió la gente completamente mostrando que no podría funcionar. Era muy, muy sorprendente cuando Gödel hizo esto en 1931. Y creo que Turing profundizó más en esto. Así que déjenme darles un resumen de cartón en cinco minutos, mi enfoque sobre lo que ellos hicieron.

Gödel empieza con “esta proposición es falsa”, que estoy diciendo una mentira ahora, estoy mintiendo. Si estoy mintiendo, y es una mentira que estoy mintiendo, entonces estoy diciendo la verdad! Así que “esta proposición es falsa” es falsa si y solo si es verdadera, aquí hay un problema. Gödel considera en vez de esto “esta proposición no es demostrable!”

Aquí demostrable significa demostrable desde los axiomas del sistema axiomático de Hilbert, demostrable dentro del sistema que Hilbert estaba tratando de crear.

Ahora piensen acerca de una proposición que dice que es improbable. Hay dos posibilidades: es demostrable o no es demostrable. Esto asumiendo que usted puede hacer una proposición que dice que no es demostrable, que hay una forma de decir esto dentro del sistema de Hilbert. Eso requirió una enorme habilidad: numeración de Gödel, trucos para que una proposición se refiera a sí misma indirectamente, porque los pronombres que dicen “esto” o “yo” no se encuentran usualmente en las fórmulas matemáticas. Así que esto requirió mucha destreza de la parte de Gödel. Pero la idea básica es “esta proposición no es demostrable”.

Así que hay dos posibilidades. O es demostrable o no es demostrable. Y esto significa demostrable o no demostrable dentro del sistema que Hilbert había propuesto, la meta final de formalización de toda la matemática.

Bien, si es demostrable, y dice que no es demostrable, estamos probando algo que es falso. Así que eso no es muy bonito. Y si no es demostrable y dice que no es demostrable, entonces, lo que establece es verdadero, no es demostrable, y tenemos un hueco. En vez de demostrar algo falso tenemos incompletitud, tenemos una proposición verdadera que nuestra formalización no ha podido capturar.

Así que la idea es que estamos probando proposiciones falsas, lo cual es aterrador, o obtenemos algo que no es tan malo, pero todavía es feo, que nuestro sistema formal axiomático es incompleto – hay algo que es verdad pero no podemos probarlo dentro de nuestro sistema. Y entonces la meta de formalizar una vez y por todas toda la matemática termina en el piso!

Ahora, yo no creo que Hilbert realmente deseara que formalizáramos toda la matemática. El no dijo que deberíamos trabajar en un lenguaje artificial y tener demostraciones formales. Las demostraciones formales tienden a ser muy largas e inhumanas y difíciles de leer. Creo que la meta de Hilbert era filosófica.

Si usted cree que la matemática da verdad absoluta, entonces me parece que Hilbert tuvo que estar en lo correcto, debería haber existido una forma para formalizar de una vez y por todas toda la matemática. Esto era la clase de cosa que la lógica matemática estaba tratando de hacer, la idea de descomponer las demostraciones en pasos cada vez más pequeños. Y Leibniz pensó esto, y Boole pensó esto, y Frege y Peano y Russell y Whitehead pensaron esto. Es la idea

de hacer muy claro el como opera la matemática paso a paso. Esto no suena mal. Desafortunadamente se rompe en este punto.

Así que todos están en un terrible estado de shock en este punto. Ustedes leen ensayos por Hermann Weyl o John von Neumann diciendo cosas como esta: Me hice matemático porque esta era mi religión, creía en la verdad absoluta, aquí había belleza, el mundo real era feo, pero tomé refugio en la teoría de números. Y súbitamente Gödel viene y arruina todo, y deseo suicidarme!

Esto era bien feo. Sin embargo, esto

“Esta propos no es demostrable”

es una proposición con una apariencia muy extraña. Y hay forma de racionalizarla, los seres humanos son buenos en eso, ustedes no desean enfrentar la desagradable realidad. Y es muy fácil ser indiferente a esta desagradable realidad: usted solo dice, bien, a quien le importa! Las proposiciones con las que trabajo normalmente en matemática, no son de esta clase. Esto es sin sentido! Si usted hace esta clase de estupidez, obviamente va a meterse en problemas.

Pero eso es racionalizar demasiado. Porque de hecho Gödel hizo de esto

“Esta propos no es demostrable”

una proposición en la teoría elemental de números. En su forma original, seguro, es un sin sentido, quien había oído de una proposición en matemática que dice que no es demostrable? Pero de hecho Gödel hizo esto como una proposición numérica en la teoría de números elemental, en aritmética. Era una larga proposición, pero en una astuta forma, implicando la numeración de Gödel de todas las proposiciones aritméticas usando números primos, el la escribió de forma que parecía una proposición en la matemática real. Pero realmente estaba refiriéndose a si misma indirectamente y diciendo que no es demostrable.

Así que esa es la razón por la que había un problema. Pero la gente no sabía realmente que hacer con esto. Así que yo pondría “sorprendente” aquí, sorprendente, un shock terrible!

1931 Gödel “Esta proposición no es demostrable” **Sorprendente**

Ahora, mi reacción de niño leyendo esta demostración es que la seguí paso a paso, pero no me gustó. No me atrae! Lo cual es bueno porque si hubiera dicho que me gustaba, es una maravilla, listo, hubiera seguido adelante y me habría hecho un biólogo molecular y empezado una compañía biotecnológica, y ahora sería rico, pero no habría realizado ningún trabajo en esta área!

Entonces viene Turing.

1936 Turing

Yo prefiero el enfoque de Turing. Turing profundiza mas en esto. El empieza a hablar acerca de computadores. Este es el punto donde ocurre!

1936 El **Computador** de Turing

Turing tiene que inventar el computador, porque Hilbert dice que debería haber un procedimiento mecánico para decidir si una demostración es correcta o no. Turing dice que lo que Hilbert realmente quiere decir es que debería haber un programa de computador para chequear demostraciones. Pero primero Turing tiene que decir lo que es un computador, es una máquina de Turing, y todo esto en un artículo de Turing de 1936, cuando no habían computadores, así que es una pieza fantástica de trabajo. Y me gustaría afirmar que esta es la invención del computador. Estos eran computadores de propósito general, esa era la idea sobre el papel.

Lo que Turing demuestra de hecho es que hay una afirmación relativamente concreta que escapa al poder de la matemática. Ahora pensamos en los computadores como dispositivos físicos, así que son algo casi del dominio de la física. Es una máquina trabajando, es una idealización de eso, usted tiene esta máquina trabajando, y Turing descubre el problema de la detención.

1936 El problema de la detención del **Computador** de Turing

El problema de la detención dice que no hay forma de decidir si un programa de computador eventualmente parará.

Ahora obviamente decidir si un programa de computador para es la cosa más fácil del mundo. Usted lo corre y cuando se le agota la paciencia, eso es, no para hasta a donde usted le preocupa. A quien le importa, usted no puede esperar más!. Pero lo que Turing demostró es que hay un problema si usted no coloca un límite. Esto es matemática muy abstracta - en el mundo real siempre hay un límite temporal! Usted no puede correr un programa un millón de años, un billón de años, $10^{10^{10}}$ años! Si usted coloca un límite de tiempo, el problema de la detención es muy fácil de decidir, en principio: usted solo corre el programa por ese lapso y ve si para en ese punto o no.

Pero lo que Turing demostró es que si usted no coloca límite, entonces no hay solución. No hay forma de decidir por adelantado si un programa de computador parará o no. Si para usted puede descubrir esto eventualmente corriéndolo. El problema es notar que usted tiene que renunciar. Así que no hay procedimiento mecánico que decida por adelantado si un programa de computador parará o no, y entonces resulta que no hay un conjunto de axiomas matemáticos en el sentido de Hilbert que le permitan probar si un programa parará o no.

Porque si usted siempre puede probar si un programa parará o no, usted podría correrlo con todas las posibles demostraciones ordenadas por tamaño y chequear si son correctas, y eventualmente encontrar una prueba de que el programa va a parar o encontrar una prueba que no va a hacerlo. Y esto le daría una forma de decidir por adelantado si el programa va a parar.

En la práctica correr todas las posibles demostraciones requiere una cantidad astronómica de tiempo. Imagine cuantas demostraciones hay que ocupan una página! Usted nunca las recorrería! Pero en principio se pueden recorrer ordenadas por tamaño y chequear si obedecen las reglas, si es un sistema axiomático de Hilbert. Así que si usted tuviera una axiomatización formal de la matemática que le permitiera siempre probar que un programa para o no, esto

le daría un procedimiento mecánico, recorriendo todas las demostraciones por orden de tamaño, para decidir si un programa parará o no. Y Turing demostró que usted no puede hacerlo. Su prueba, a propósito, implica el argumento diagonal de Cantor - todas estas ideas están conectadas, pero no hay tiempo de entrar en eso.

Creo que el trabajo de Turing hace parecer los límites de las matemáticas mucho más naturales, porque estamos hablando de una pregunta acerca de un dispositivo físico, un computador.

1936 El problema de la detención del **Computador** de Turing **Natural**

Usted fantasea un poco, hace un computador teórico, uno que puede correr para siempre, que nunca interrumpe su ejecución, que tiene tanto almacenamiento como desee, así que si los números se hacen muy grandes puede continuar en cualquier caso. Pero eso no es demasiada fantasía, tenemos dispositivos como ese en toda parte, verdad? Así suena mucho más concreto. Los límites de la matemática descubiertos por Turing suenan más serios, más peligrosos que los que encontró Gödel.

Y esta es la invención del computador, para esta loca clase de argumento teórico! Usted no ve millones y millones de dólares de tecnología en este artículo de 1936, pero todo estaba allí en forma embrionaria, como von Neumann sigue enfatizando: la máquina universal de Turing es realmente la noción de computador programable de propósito general. Usted tenía máquinas que hacían cálculos antes, pero hacían cálculos específicos, eran máquinas sumadoras, máquinas mecánicas de cálculos, y yo las usé cuando era un niño. Pero la noción de computador es la noción de Turing de una máquina que puede hacer lo que cualquier máquina calculadora puede hacer, y esa es la idea de software: es una máquina de un gran propósito general, es una máquina flexible. Así que esta realmente ahí, von Neumann seguía diciendo, muy claramente en este artículo de Turing. Así que usted tiene toda esta tecnología entera allí!

Y de hecho el artículo de Gödel, como dije, usa LISP, hay un lenguaje de programación oculto en él, y en el artículo de Turing hay un lenguaje de programación, dado explícitamente, máquinas de Turing, y es un lenguaje de máquina. Realmente es un lenguaje de máquina muy malo, es una máquina que ninguna persona en sus cabales desearía programar. Pero Turing deseaba conservarla tan simple como fuera posible. Obviamente, si su artículo hubiera incluido un manual para el lenguaje de máquina de una máquina real, no habría esperanza, nadie lo habría entendido.

Okey, que pasa con todo esto? Lo que pasa es que Hilbert muere, viene la Segunda Guerra Mundial, y cuando yo soy un niño en los 1950's podía leer ensayos de John von Neumann hablando de todo esto, pero el mundo estaba claramente yendo en una dirección menos filosófica. Las cosas iban colina abajo rápidamente hasta que todos somos multimillonarios con nuestras compañías web! La gente estaba menos implicada con la filosofía, y los computadores llegaron a ser una tecnología, y Turing estaba muy implicado en eso, también lo estaba von Neumann.

Pero estúpidamente yo deseaba entender lo que estaba pasando en los fundamentos de la matemática, así que en una forma yo estoy estancado en los 1930's, nunca pasé esa etapa. Que pasó? Lo que me pasó es que no podía aceptar el hecho de que todo el mundo decía, a quien le importa! Ahora es verdad que hay una gran cantidad de cosas en la vida diferentes de los fundamentos de la matemática y la epistemología! Hay cosas como tener una familia, ganarse la vida, guerras, política, cantidades de cosas allí afuera, obviamente! Pero lo que yo no podía aceptar es que incluso en el mundo de la matemática pura, los matemáticos estaban diciendo, y que, en la práctica deberíamos hacer matemáticas exactamente de la misma forma en que siempre las hemos realizado, esto no se aplica a los problemas que a mi me importan! Esa era básicamente la reacción al trabajo de Gödel y de Turing sobre la incompletitud.

Primero hubo un shock terrible, luego se paso de un extremo al otro. A quien le importa, la gente diría, es obvio, o es irrelevante! Esto no tiene impacto en la práctica sobre el como debemos hacer matemática. Yo estaba muy descontento con eso. Estaba obsesionado por la incompletitud, y tuve una idea.

Cuando era un niño realmente deseaba ser un físico, y muchos matemáticos dicen que dicen Nunca lo logre en la matemática realmente - Nunca tuve éxito, todavía estoy estancado! Deseaba ser un físico, y me corrompí por muchas ideas de la física. Mientras esta crisis estaba ocurriendo en la matemática, había una crisis paralela en la física, la cual empezó en los 1920's: era la mecánica cuántica, y la fecha clave es 1924.

1924 Mecánica Cuántica

Y ese es todo el asunto de la incertidumbre y la aleatoriedad en la física fundamental. Así que cuando era un niño, aparte de leer ensayos hablando del teorema de incompletitud de Gödel diciendo "Oh Dios mío", habían también ensayos preguntando que le pasaba al determinismo en la física, que la pasaba a la previsibilidad, puede haber aleatoriedad, Dios juega a los dados? Einstein dijo no, Dios no juega a los dados. El odiaba la mecánica cuántica. Y todo el resto del mundo dijo si, Dios juega a los dados.

Dios juega a los dados!

La mecánica cuántica es la teoría mas exitosa hasta ahora. Obtenemos transistores y computadores de ella. Pero incluso aunque Einstein ayudó a contribuir a la creación de la mecánica cuántica el la odiaba. Entonces parece que Einstein estaba equivocado. Dios juega a los dados!

Yo tenia una idea loca. Pensé que quizás el problema es mucho mas grande y que Gödel y Turing eran solo la punta del iceberg. Quizás las cosas eran mucho peor y lo que tenemos aquí en la matemática pura es aleatoriedad. En otras palabras, quizás algunas veces la razón por la que usted no puede probar algo no es porque usted es estúpido o no lo ha trabajado lo suficiente, la razón por la cual usted no puede probar algo es porque no hay nada ahí! Algunas veces la razón por la cual usted no puede resolver un problema matemático no es porque usted no es lo suficientemente listo, o porque no es lo suficientemente resuelto,

es porque no hay solución porque quizás la pregunta matemática no tiene estructura, quizás la respuesta no tiene patrón, quizás no hay orden o estructura que usted pueda tratar de entender en el mundo de la matemática pura. Quizás algunas veces la razón por la que usted no ve un patrón o estructura es porque no hay patrón o estructura!

Una de mis motivaciones eran los números primos. Hay algún trabajo en los números primos que dice que en algunas maneras los números primos pueden ser observados estadísticamente. Parece haber una cierta cantidad de aleatoriedad en la distribución de los primos. Y esto incluso ocurre en la teoría de números, la reina de la matemática pura!

Entonces en una mano yo oía esta charla acerca de formas probabilísticas de pensar sobre los números primos - esto era heurístico - y esta cosa de que Dios juega a los dados en la física fundamental - lo que ocurre en los átomos es aleatorio - y empecé a pensar, bien, quizás esto es lo que ocurre en los fundamentos de la matemática.

Esto es lo que empecé a hacer, y este proyecto tomo mucho tiempo. Uno de los primeros pasos es aclarar lo que usted quiere decir por aleatoriedad. Que significa falta de estructura, falta de orden, ausencia de patrón?

Aleatoriedad: ausencia de estructura

Esta es una clase de noción lógica de aleatoriedad en vez de una noción estadística. No es como en física donde usted dice que un proceso físico es aleatorio como el lance de monedas. No me importa de donde vienen las cosas. Solo miro algo y digo si tiene estructura o patrón o no. Esta es una aleatoriedad lógica o estructural contraria a la imprevisibilidad y aleatoriedad física. Es diferente - están relacionadas muy cercanamente, pero son diferentes.

Y la idea que tuve - y Kolmogorov la tuvo al mismo tiempo independientemente - es la idea de que algo es aleatorio si no puede ser comprimido en una descripción mas corta, si esencialmente usted tiene que escribirlo tal como es. En otras palabras, no hay una teoría concisa que lo produzca. Por ejemplo, un conjunto de datos físicos serian aleatorios si la única forma de publicarlo es en una tabla, pero si hay una teoría usted comprime mucha información en un pequeño número de principios físicos o leyes. Y entre mayor la compresión, mejor la teoría: de acuerdo con la navaja de Occam, la mejor teoría es la mas simple. Yo diría que una teoría es un programa - también Ray Solomonoff hizo algo en esta línea para hacer inducción - el no definió la aleatoriedad, pero debió hacerlo! Si usted piensa en una teoría como en un programa que calcula las observaciones, la pequeñez del programa es relativa a la salida, las observaciones, entre mejor sea la teoría.

A propósito, eso es también lo que hacen los axiomas. Yo diría que los axiomas son la misma idea. Usted tiene un montón de teoremas o verdad matemática y los comprime en un conjunto de axiomas. Por que es bueno esto? Porque entonces hay menos riesgo. Porque los axiomas son hipótesis que usted tiene que hacer y cada vez que usted hace una hipótesis tiene que tenerle fe y hay riesgo - usted no la esta probando a partir de nada, la esta tomando como

dada, y entre menos asuma mas seguro se esta. Entonces entre menos axiomas se tengan, usted esta mejor. Así que entre mayor compresión haya de un monton de teoremas, de un cuerpo de una teoría, en un pequeño conjunto de axiomas, mejor esta usted, yo diría esto en matemáticas tanto como en física.

Okey, entonces esta es la noción de falta de estructura o aleatoriedad. Usted tiene que definirla primero! Si voy a encontrar falta de estructura, falta de patrón, en la matemática pura, primero tengo que decir lo que quiero decir por eso. Y yo llamo a este tema teoría algorítmica de la información. Trata con esta información algorítmica. O usted puede llamarla complejidad si le gusta, complejidad del tamaño de programas.

Información Algorítmica

El concepto básico es mirar al tamaño del programa mas conciso, el menor programa - no me importa su tiempo de ejecución - es el programa mas conciso que calcula algo. Este es el número de bits que tengo que darle al computador a fin de producir este objeto. Esa es mi descripción algorítmica mas concisa de algo, y así es como mido su complejidad, su contenido de información algorítmica o la complejidad del tamaño de su programa.

Esto es como la teoría de funciones recursivas: no me importa el tiempo de ejecución - así que esto es muy impráctico! En ese sentido también yo estoy haciendo las cosas de 1930, lanzando esta idea extra del tamaño de programas, de mirar al tamaño de los programas.

Que pasa cuando usted empieza a mirar el tamaño de los programas? - y entonces algo es aleatorio si el menor programa que lo calcula tiene el mismo tamaño, y no hay compresión. Entonces la idea completa es, mire al tamaño de programas de computador, no importa su tiempo de ejecución - no me importa si toma un billón de años! La información es la unica cosa en que estoy pensando, bits de información, tamaño de programas de computador. Okey?

Que pasa cuando usted empieza a jugar con esta idea? Lo que ocurre es que, dondequiera que mire, se obtiene incompletitud e indecidibilidad, y usted se adentra en el peor camino posible. Por ejemplo esto pasa con la primera cosa que usted desea hacer: usted nunca puede decidir que una cadena individual de dígitos satisface esta definición de aleatoriedad. Imposible! Usted nunca puede calcular la complejidad del tamaño del programa de ninguna cosa. Usted nunca puede determinar cual es el tamaño del menor programa.

Si usted tiene un programa que calcula algo, esto le da un limite **superior**, su tamaño es un limite superior de la complejidad del tamaño del programa de lo que calcula. Pero usted nunca puede demostrar que hay un limite **inferior**. Y ese es mi primer resultado de incompletitud en esta área y creo que Jack Schwartz se entusiasmó mucho con esto.

En la teoría normal, práctica, útil de la complejidad usted habla de tiempo en vez de bits de información, los limites inferiores son mucho mas difíciles que los limites superiores. Obtener limites inferiores en complejidad es mucho mas difícil que obtener limites superiores. Porque si usted encuentra un algoritmo inteligente obtiene un limite superior en el tiempo que toma calcular algo; si

usted encuentra una forma de hacerlo eso es lo mas rápido que usted ha demostrado que puede hacerse así de rápido. El problema es demostrar que usted ha obtenido el algoritmo mas rápido posible, eso es mucho mas difícil, verdad? Pero puede hacerse en algunos casos, dentro de una clase de algoritmos posibles. Bien, en la teoría algorítmica de la información usted no puede probar **ningún** limite inferior! Y tuve un artículo acerca de esto en 1975 en Investigación y Ciencia.

La idea básica es que usted no puede probar cualquier limite menor en la complejidad del tamaño del programa de objetos individuales. En particular incluso la mayoría de cadenas de dígitos satisfacen esta definición de aleatoriedad, son incompresibles en ese sentido, son aleatorias en este sentido de falta de estructura - resulta que usted puede demostrar fácilmente que la mayoría de objetos satisfacen esta definición, no tienen estructura - si usted mira a todos los cientos de número dígitos, casi todos ellos no tienen estructura de acuerdo a esta definición, pero usted nunca puede estar seguro en casos individuales, nunca puede probarlo para casos individuales.

Mas precisamente, pueden haber finitamente muchas excepciones. Con N bits de axiomas usted puede determinar todos los objetos de complejidad de tamaño de programa hasta N. Pero eso es todo lo lejos que puede ir.

Y mi peor resultado de incompletitud, mi realmente peor resultado de incompletitud, donde usted obtiene una total ausencia de estructura en la matemática pura, tiene que ver con un número que definí como la probabilidad de detención.

$$\Omega = \text{probabilidad de detención}$$

Como se define este número? Es muy simple. Turing dijo que usted no puede decidir si un programa se detiene, no hay procedimiento mecanico para hacer eso. Y yo digo, considere un número real Ω que es la probabilidad de que un programa generado lanzando una moneda al aire se detenga. Entonces estoy promediando sobre el problema de detención de Turing, diciendo que si genero un programa lanzando monedas al aire, cual es la probabilidad de que se detenga, sin limite de tiempo? Entonces esto me dará un número real determinado si usted me dice - hay un subíndice - cual es el lenguaje de programación.

$$\Omega_{\text{computador}} = \text{probabilidad de detención del computador}$$

Una vez que usted decide, entonces Ω es un número real bien definido. Matemáticamente no es una cosa muy sofisticada! Compárelo con los grandes cardinales, con matemáticas sofisticadas, este es claramente un objeto de bajo perfil.

Sin embargo resulta que este objeto es máximamente incognoscible!

Ω es **máximamente incognoscible**

¿Que es esto de ser máximamente incognoscible? Bien, son los dígitos o bits de este número. Una vez que fijo el lenguaje de programación esta probabilidad de detención es un número real específico, que depende de la escogencia

del computador, o el lenguaje de programación en el cual genero un programa lanzando monedas al aire. Así esto se hace un número real específico, y digamos que lo escribo en binario, así que obtengo una secuencia de 1's y 0's, es una definición muy simple. Bien, resulta que esos 0's y 1's **no** tienen estructura matemática. No pueden ser comprimidos. Para calcular los primeros N bits de este número se requiere un programa de N bits. Para ser capaz de probar lo que son los primeros N bits de este número se requieren N bits de axiomas. Esta es información matemáticamente irreducible, esa es la idea clave.

Ω es información irreducible

Esto debería ser una idea chocante, información matemáticamente irreducible, porque la idea general normal de la matemática, la idea Hilbertiana, la idea clásica de la matemática, es que toda la verdad matemática puede ser reducida a un pequeño conjunto de axiomas sobre los cuales podemos ponernos de acuerdo, que ojalá sean "auto-evidentes". Pero si usted desea determinar lo que son los bits de la probabilidad de detención, esto es algo que no puede ser reducido a nada más simple.

Ω tiene una definición con una estructura más bien simple una vez que específico el computador, o el lenguaje de programación, yo he escrito incluso un programa en LISP que calcula este número en un sentido débil. Usted no puede calcular este número. Si pudiera calcularlo, entonces no sería incognoscible! Usted puede obtener un límite por debajo, pero converge muy, muy lentamente - nunca puede saber que tan cerca está - no hay un regulador computable de convergencia, no hay forma de decidir que tan lejos ir para obtener los primeros N bits de Ω correctos. Para obtener Ω en el límite por abajo, usted mira más y más programas, durante más y más tiempo, y cada vez que un programa de K bits se detiene, eso contribuye en $1/2^K$ a la probabilidad de detención.

$$\Omega = \sum_{p \text{ se detiene}} 2^{-|p|}$$

Así que el tiempo que usted necesita para obtener los primeros N bits de Ω correctos crece como el tiempo de ejecución más largo posible de un programa de N bits, lo cual es una versión de la función Busy-Beaver.

Entonces cuál es la definición precisa de Ω ? Genere un programa lanzando una moneda por cada bit, esas son lanzadas independientes de una moneda no cargada. El punto clave es que el programa tiene que ser "auto-delimitado". El computador tiene que preguntar por cada bit uno por uno. Cada vez que el computador dice que desea otro bit del programa, usted lanza la moneda. Y el computador tiene que decidir por sí mismo si tiene suficientes bits, que tiene el programa completo. El programa tiene que ser auto-delimitante para definir esta medida de probabilidad correctamente. Entonces no hay marcador para indicar donde finaliza un programa: un programa debe indicar dentro de sí mismo su longitud por medio de algún truco, algún truco de codificación. Este

es el problema técnico para obtener esta probabilidad bien definida. Ese es el punto técnico en mi teoría.

Así que este número Ω es un número real entre 0 y 1. Es la probabilidad de que un programa cuyos bits han sido generados por lanzadas independientes de una moneda eventualmente se detenga. Y estoy fijando el lenguaje de programación, escojo la máquina universal de Turing, hay un subíndice, es Ω_{MUT} , es la probabilidad de detención de una máquina universal de Turing particular. Y realmente escojo una MUT que programé en LISP, para aterrizar las ideas. Pero usted podría hacerlo esencialmente con cualquier máquina universal de Turing con programas auto-delimitantes, también funcionaría.

Entonces Ω es máximamente incognoscible. Este es un caso donde la verdad matemática no tiene estructura o patrón y es algo que nunca vamos a saber! Déjenme decirles lo que he obtenido aquí. He obtenido máxima aleatoriedad - como lances independientes de una moneda al aire - en la matemática pura. De hecho, puedo hacerlo incluso en la teoría de números elemental, como Gödel lo hizo. Puedo convertir el determinar los bits de Ω en una proposición acerca de una ecuación diofantina.

El punto es, aquí usted ha obtenido una pregunta matemática simple - cuales son los bits individuales de Ω - es el primer bit 0 o 1, el segundo bit 0 o 1, el tercer bit 0 o 1 - pero las respuestas no tienen estructura, son como lances independientes de una moneda al aire, incluso aunque cada respuesta esta bien definida matemáticamente, porque es un bit específico de un número real específico y tiene que ser un 0 o un 1. De hecho, nunca vamos a saber: esta es mi versión de lances independientes de una moneda en la matemática pura. Incluso si usted conociera todos los bits pares de Ω esto no le ayudaría a obtener ninguno de los bits impares. Incluso si usted conociera el primer millón de bits, esto no le ayudaría a obtener el siguiente millón. Esto realmente luce como lances independientes de una moneda no cargada, es máximamente aleatorio, tiene entropía máxima.

Los físicos se sienten confortables con la aleatoriedad, pero este es el mundo blanco o negro de la matemática pura - como es posible, como puede ser? Cada uno de estos bits esta bien definido, es un 0 o un 1 específico, porque Ω es un número real específico una vez que determino la máquina universal de Turing o el lenguaje de programación con que voy a trabajar. Pero resulta que la forma correcta de pensar acerca de cada bit es que no es blanco o negro, que no es 0 o 1, esto esta tan bien balanceado, esta tan delicadamente balanceado, que es **gris!**

Aquí hay otra forma de ponerlo. Vamos atrás a Leibniz. Cual es la idea de la matemática? La idea normal es que si algo es verdadero, lo es por una razón - Leibniz! - si algo es verdadero, lo es por una razón. En matemática pura, la razón de que algo es verdadero se denomina demostración, y el trabajo de un matemático es encontrar demostraciones, encontrar la razón por la que algo es verdadero. Pero los bits de este número Ω , si son 0 o 1, son verdades matemáticas que son verdaderas sin ninguna razón, son verdaderas **por accidente!** Y esa es la razón por la cual nunca conoceremos esos bits.

En otras palabras, no es solo que Hilbert estaba un poco equivocado. No

es solo que la noción de matemática pura esta un poco equivocada, que hay pequeños huecos, que hay unos pocos casos degenerados como “Esta proposición es improbable”. No es de esa forma!, es mucho, mucho peor que eso! Hay casos extremos donde la verdad matemática no tiene ninguna estructura, donde es máximamente incognoscible, donde es completamente accidental, donde usted tiene verdades matemáticas que son como lances de monedas, son ciertas por accidente, son ciertas sin ninguna razón. Por esto es que usted nunca puede probar si los bits individuales de sin Ω son 0 o son 1, porque **no hay razón** de que los bits individuales sean 0 o 1! Por eso es que usted no puede encontrar una prueba. En otras palabras el que cada bit sea 0 o 1 esta tan delicadamente balanceado que nunca vamos a saberlo.

Entonces resultó no solo que Hilbert estaba equivocado, como Gödel y Turing demostraron ... quiero resumir todo esto. Con Gödel resulta sorprendente que usted tenga incompletitud, que ningún conjunto finito de axiomas pueda contener toda la verdad matemática. Con Turing la incompletitud parece mucho mas natural. Pero con mi enfoque, cuando usted mira el tamaño de programas, yo diría que luce inevitable. Donde usted voltee a mirar, se estrella con un muro gigante de piedra y la incompletitud lo golpea en la cara!

Complejidad de tamaño de programas & Ω & información irreducible \rightarrow hacen que la incompletitud parezca **inevitable**

Esto es lo que he estado trabajando. Cual es la reacción del mundo a este trabajo?! Bien, creo que es justo decir que la única gente a la que le agrada lo que estoy haciendo son los físicos. Tengo una idea foránea llamada aleatoriedad que estoy llevando a la lógica, y los lógicos se sienten muy incómodos con ella. Usted sabe, la noción de tamaño de programa, complejidad de tamaño de programa es como la idea de entropía en la termodinámica. Así que resulta que los físicos lo encuentran agradable porque lo ven como ideas de ellos invadiendo la lógica. Pero a los lógicos no les gusta mucho esto.

Creo que pueden haber razones políticas, pero creo que también hay razones conceptuales legítimas, porque estas son ideas que son tan foráneas, la idea de aleatoriedad o de cosas que son verdaderas por accidente es tan extraña a un matemático o a un lógico, que es una pesadilla! Esta es su peor pesadilla hecha realidad! Creo que ellos prefieren no pensar sobre esto.

En la otra mano, los físicos piensan que es encantador! Porque recuerdan bien la crisis que sufrieron a través de los 1920's sobre la aleatoriedad en los fundamentos de la física, y ellos dicen, no somos solo nosotros, no somos la única gente que tiene aleatoriedad, la matemática pura la tiene también, no son nada mejores que nosotros!

Les daré un ejemplo de la actitud de los físicos hacia mi teoría. Ocurre que esta semana lo encontré por azar. Hay una revista inglesa *New Scientist* de tiraje semanal; es como una versión inglesa de *Investigación y Ciencia*, excepto que es un poco mas alegre, es un poco mas divertida, y es semanal. El número actual - el que apareció el 26 de febrero, el próximo número no ha salido aun - de *New Scientist* tiene en su cubierta un artículo llamado “Realidad Aleatoria”.

Y si usted abre el número y mira este artículo, resulta ser sobre el trabajo de dos físicos, un trabajo muy especulativo. Están intentando obtener el espacio y el tiempo, espacio tiempo tri o tetradimensional, nuestro mundo, emergiendo desde un substrato aleatorio por debajo.

Léalo si quiere. Hay un enlace en mi página web hacia este artículo, “Realidad Aleatoria”. O consiga a *New Scientist*.

La razón por la que menciono este artículo es que estos físicos dicen que su trabajo se inspiró en Gödel y en mi trabajo en los límites de la lógica; ellos están tratando de absorber este material. Dicen que los físicos estaban interesados en el resultado de Gödel, pero no podían relacionarse con él, no está en términos que tengan sentido para un físico. Pero mi trabajo, dicen ellos, sí tiene sentido para un físico! No es sorprendente: Yo obtuve la idea leyendo física. Así que le encuentran sentido porque es una idea que vino de su campo y está regresando a su campo.

Realmente, ellos no usan mis definiciones o mis teoremas para nada, porque me pidieron que arbitrara su artículo, y tuve que decir que realmente no tiene nada que ver conmigo. Mi material es mencionado en la introducción porque ayudó a estimular su trabajo, pero realmente su trabajo es en física y no tiene nada que ver con mi área, la teoría algorítmica de la información.

Pero creo que este es un interesante ejemplo del hecho de que algunas veces ideas locas tienen consecuencias inesperadas! Como dije, los sistemas formales no tuvieron éxito para el razonamiento, pero funcionaron maravillosamente para la computación. Así que lo de Hilbert es el mayor increíble éxito en el mundo, pero como tecnología, no como epistemología.

E inesperadamente hay físicos que están interesados en mi noción de complejidad de tamaño de programas; la ven como otra forma de entropía termodinámica. Hay algún trabajo de físicos reales sobre el demonio de Maxwell usando mis ideas; lo menciono para aquellos de ustedes que tienen alguna formación en física.

Pero debo decir que los filósofos no han atrapado la bola. Creo que los lógicos odian mi trabajo, lo detestan! Y soy como pornografía, soy una clase de tipo inmenso en el mundo de la lógica, porque mis resultados son tan repugnantes!

Esta es mi historia! Para finalizar, déjenme citar de una colección póstuma de ensayo de Isaías Berlin *El poder de las Ideas* que fue recién publicado: “Hace cien años, el poeta Alemán Heine advirtió a los franceses que no subestimaran el poder de las ideas: conceptos filosóficos nutridos en el silencio de un estudio de profesor podrían destruir una civilización” Así que *cuidado con las ideas*, creo que esto es realmente cierto.

La idea de Hilbert de ir al límite, de la formalización completa, y por razones epistemológicas, fue una controversia sobre los fundamentos de la matemática - hay fundamentos? Y en una forma el proyecto falló, como he explicado, por el trabajo de Gödel y Turing. Pero aquí estamos con estas formalizaciones completas que son los lenguajes de programación de computadores, están en toda parte! Pagan mi salario, probablemente paguen su salario . . . bien, esta es la Escuela de Ciencias de la Computación, paga por todo esto, verdad? Aquí

estamos!

Así que funcionó! En otro sentido, funcionó tremendamente.

Me gustaría defender en una forma agresiva mi campo. Me gusta decir que mi campo no tiene aplicaciones, que la cosa mas interesante acerca del campo de la complejidad del tamaño de programas es que no tiene aplicaciones, que demuestra que no puede ser aplicada! Porque usted no puede calcular el tamaño del menor programa. Pero eso es lo fascinante de ello, porque revela los limites de lo que podemos saber. Por eso la complejidad del tamaño de programas tiene importancia epistemológica.

Mas seriamente, creo que la moral de la historia es que las ideas profundas no tienen un cambio en dólares inmediato, pero algunas veces tienen vastas consecuencias inesperadas. Nunca esperé que dos físicos se refirieran a mi trabajo de la forma en que lo hicieron en "Realidad Aleatoria". Así que quien sabe!

Es cierto que el computador paga por nuestros salarios pero creo que también es cierto que hay muchas ideas fascinantes imprácticas ahí afuera, y algunas veces cuando una idea es tan hermosa - He tenido maravillosas conversaciones con gente aquí - Peter Lee me dijo en el almuerzo, esta idea es tan hermosa, que tiene que ser correcta!. Esas son las ideas para buscar! Esas que son peligrosas, las que pueden transformar nuestra sociedad. Esta pequeña idea de una red, por ejemplo, de enlazar material en la web! O la idea de tener lenguajes completamente artificiales, porque entonces se hace mecánico ver lo que significan . . . Ideas muy peligrosas! Muchas gracias!

Referencias

- [1] G.J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory*, Cambridge University Press, 1987
- [2] G.J. Chaitin, *Information, Randomness Incompleteness*, World Scientific, 1987
- [3] G.J. Chaitin, *Information, Randomness Incompleteness*, 2nd Ed., World Scientific, 1990
- [4] G.J. Chaitin, *Information-Theoretic Incompleteness*, World Scientific, 1992
- [5] G.J. Chaitin, *The Limits of Mathematics*, Springer-Verlag, 1998
- [6] G.J. Chaitin, *The Unknowable*, Springer-Verlag, 1999
- [7] Recientemente he finalizado la programación de toda mi teoría en LISP. Esto eventualmente será mi libro *Algorithmic Information Theory in LISP*, en preparación.