Rolf Lindner

FREGEs zweidimensionaler Logik-Kalkül aus der Sicht einiger mathematisch-kybernetischer Aufgaben

I.

Folgt man den Auffassungen der Logik-Schulen aus den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts (vgl. z. B. /8, 2/), so hat man unter einem Kalkül $/X^*, A, S, F/$ eine Struktur zu verstehen, in der X^* die von einem endlichen Alphabet X erzeugte *freie Halbgruppe*, $S \subseteq A \subseteq X^*$ die *Satz-* bzw. *Ausdrucksmenge* und $F: \mathfrak{P}A \to \mathfrak{P}A$ ein *Ableitungs-* bzw. Folgerungsbegriff sind. Dabei verlangt man, daß F die Axiome eines *Hüllenoperators* sowie den *Endlichkeitssatz* erfüllt, d.h., es gilt für jedes $Y, Y_1 \subseteq A$ und jedes $H \in A$: $Y \subseteq F(Y)$; aus $Y \subseteq Y_1$ folgt $F(Y) \subseteq F(Y_1)$; $F(F(Y)) \subseteq F(Y)$; zu $H \in F(Y)$ existiert ein $Y_2 \subseteq Y$ mit $|Y_2| < \aleph_0$ und $H \in F(Y_2)$. Schließlich wird die *Abgeschlossenheit der Satzmenge* S gegenüber F gefordert, d.h. $F(S) \subseteq S$.

In Abhängigkeit davon, ob F unter Verwendung einer Semantik für die Ausdrücke aus A oder mit rein syntaktischen Mitteln definiert wird, spricht man von einem *semantischen* bzw. *syntaktischen* Folgerungs- bzw. Ableitungsbegriff. Desgleichen wird S *semantisch definiert* genannt, wenn S die Menge der Tautologien bezüglich einer gewählten Semantik ist; S heißt dahingegen *syn-*

t a k t i s c h   d e f i n i e r t e   S a t z m e n g e , wenn $S = F(Ax)$ gilt, wobei $Ax \subseteq A$ eine Menge von Axiomen und F ein syntaktischer Ableitungsbegriff sind.

Als Beispiel eines Kalküls im Sinne dieser Auffassungen analysieren wir den k l a s s i s c h e n   z w e i w e r t i g e n   A u s s a g e n k a l k ü l. Wir verwenden das Alphabet $X =_{Df} \{p, |, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (\ ,\ )\}$ und definieren die Ausdrucksmenge $A \subseteq X^*$ als kleinste Menge, für die $\{p\} \cdot \{|\}^* \subseteq A$; $\{\sim\} \cdot A \subseteq A$ und $\{(\} \cdot A \cdot \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cdot A \cdot \{)\}$ A gilt. Die Satzmenge S definieren wir semantisch; zu diesem Zwecke wählen wir als Interpretationen Funktionen $f : A \rightarrow \{0,1\}$, die durch ihre Werte auf $p \cdot \{|\}^*$ und die Bedingungen $f(\sim H) =_{Df} \mathrm{non}(f(H))$, $f((H_1 \wedge H_2)) =_{Df} \mathrm{et}(f(H_1), f(H_2))$, $f((H_1 \vee H_2)) =_{Df} \mathrm{vel}(f(H_1), f(H_2))$, $f((H_1 \rightarrow H_2)) =_{Df} \mathrm{seq}(f(H_1), f(H_2))$, $f((H_1 \leftrightarrow H_2)) =_{Df} \mathrm{äq}(f(H_1), f(H_2))$ eindeutig fixiert sind, falls man unter non, et, vel, seq, äq die bekannten BOOLEschen Funktionen "Negation", "Konjunktion", "Alternative", "Implikation", "Äquivalenz" versteht.

Jedem Ausdruck $H \in A$, dessen Menge V_H der Aussagenvariablen in einer Menge $V = \{p|^{i_1}, \ldots, p|^{i_k}\}$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$) enthalten ist, wird nun eine BOOLEsche Funktion (eine W a h r h e i t s w e r t f u n k t i o n) φ_H^V eindeutig zugeordnet, wenn man für jede Interpretation f fordert $\varphi_H^V(f(p|^{i_1}), \ldots, f(p|^{i_k})) = f(H)$.

Für jedes Paar von Ausdrücken H_1, H_2 sagt man dann, aus H_1 folge semantisch H_2 (H_1 fol H_2), wenn $(\varphi_{H_1}^{V_{H_1} \cup V_{H_2}})^{-1}(1) \subseteq (\varphi_{H_2}^{V_{H_1} \cup V_{H_2}})^{-1}($ gilt. Setzt man schließlich $F(\omega) =_{Df} \bigcup_{H_1 \in M} \{H_2 : H_1 \text{ fol } H_2\}$ für

$M \in \mathfrak{R}(A)$, so hat man einen semantischen Folgerungsoperator definiert, und unser Quadrupel $/X^{*}, A, F, S/$ mit $S =_{Df} \{ H : H \in A$ und $\varphi_H^{H} = 1 \}$ ist ein Kalkül mit semantisch definierter Satzmenge.

Der Wert von Logik-Kalkülen für grundlagentheoretische Untersuchungen von mathematischen Theorien nach ihrer Entscheidbarkeit, Axiomatisierbarkeit usw. ist heute unbestritten. Vor weniger als 100 Jahren bedurfte es noch großer Überzeugungskraft des Pioniers der formalen Logik, G. FREGE, um überhaupt das Anliegen mathematisch-logischer Studien begreiflich zu machen.

Wir zitieren aus /4/:

"Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedendsten Umständen anzuschmiegen weiss, eine grosse Überlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle anderen unbrauchbar.

So ist diese Begriffsschrift ein für bestimmte wissenschaftliche Zwecke ersonnenes Hilfsmittel, das man nicht deshalb verurtheilen darf, weil es für andere nichts taugt. Wenn sie diesen Zwecken einigermassen entspricht, so möge man immerhin neue Wahrheiten in meiner Schrift vermissen. Ich würde mich darüber mit dem Bewusstsein trösten, dass auch eine Weiterbildung der Methode die Wissenschaft fördert. Hält es doch B a c o für vorzüglicher ein Mittel zu erfinden, durch welches Alles leicht gefunden werden kann, als Einzelnes zu entdecken, und haben doch alle grossen wissenschaftlichen Fortschritte der neueren Zeit ihren Ursprung in einer Verbesserung der Methode gehabt."

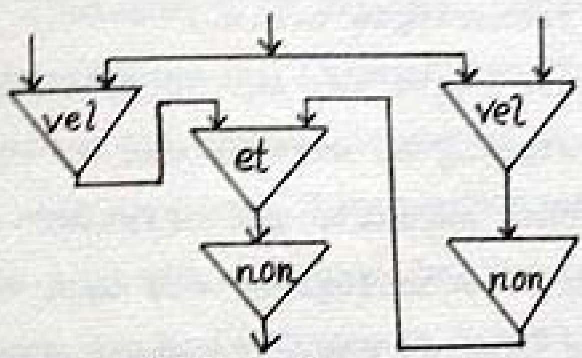
Mit dem Beginn mathematischer Analysen der Strukturen und Verhaltensweisen informationsverarbeitender Systeme wurde der Anwendung von Logik-Kalkülen ein weiteres Gebiet, die sogenannte Schaltalgebra, erschlossen. So erwies sich z.B. der oben angegebene klassische zweiwertige Aussagenkalkül als ein geeignetes Hilfsmittel zur strukturellen Beschreibung von diskreten kombinatorischen G a t t e r - (I m p u l s -) S c h a l t u n g e n. Unter derartigen Schaltungen versteht man solche, die aus elementaren Gattern zur Realisierung BOOLEscher Funktionen bestehen, welche nach bestimmten Vorschriften miteinander verbunden sind und BOOLEsche Funktionen zeitinvariant realisieren. (Wir schließen der Einfachheit halber dabei die Identität aus.) Jede Gatterschaltung γ mit k zweiwertigen Eingängen und einem zweiwertigen Ausgang kann also hinsichtlich ihrer Verhaltensweise mit einer BOOLEschen Funktion $\varphi_\gamma : \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ identifiziert werden.

Legt man eine wohlbestimmte K o s t e n f u n k t i o n κ für Gatterschaltungen fest, indem man z.B. $\kappa(\gamma) =_{Df} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varepsilon_i$ setzt, wo ε_i die Kosten des i-ten Elementargatters G_i und λ_i die Anzahl der Knoten, die mit diesem Gatter belegt sind, bezeichnen, so kann man zu einer Funktion $\hat{\kappa}$ übergehen, die jeder BOOLEschen Funktion φ den Wert $\hat{\kappa}(\varphi) =_{Df} \min\{\kappa(\gamma) : \varphi_\gamma = \varphi\}$ zuordnet, falls überhaupt ein γ in den Elementargattern $G_1, \ldots, G_n$ existiert, für das $\varphi_\gamma = \varphi$ gilt. Diese Funktion fixiert also die Mindestkosten einer Realisierung von φ über vorgegebenen $G_1, \ldots, G_n$.

Legt man für jedes Gatter G_ν mit k_ν Eingängen einen Ausdruck H_ν mit $|V_{H_\nu}| = k_\nu$ so fest, daß $\varphi_{H_\nu}^{V_{H_\nu}} = \varphi_{G_\nu}$ gilt, so wird jeder Schaltung γ über $\{G_1,\dots,G_n\}$ auf kanonische Weise ein Ausdruck H durch Substitution der Teilausdrücke $H_1,\dots,H_n$ so zugeordnet, daß $|V_H| = k$ und $\varphi_H^{V_H} = \varphi_\gamma$ gilt und umgekehrt. Von einem derartigen Ausdruck sagt man dann, daß er γ strukturell repräsentiere. So repräsentiert z.B. der Ausdruck

$$\sim((p| \vee p||) \wedge \sim(p| \vee p|||))$$

die Gatterschaltung aus Skizze 1.



Skizze 1

Ein wesentliches Anliegen der Schaltalgebra war es nun, mit den Mitteln des Aussagenkalküls zu vorgegebenen BOOLEschen Funktionen φ und Gattern $G_1,\dots,G_n$ auf möglichst effektive Weise, d.h. insbesondere unter Umgehung simpler Durchmusterungen, Ausdrücke H zu finden, die eine Schaltung γ über $\{G_1,\dots,G_n\}$ repräsentieren, deren Kosten $\kappa(\gamma)$ wenig von $\hat{\kappa}(\varphi)$ abweichen (man vgl. etwa /3/).

Diese die Schaltalgebra für lange Zeit beherrschende Aufgabe findet ihre Erklärung im Stand der Realisierungstechnik: Noch vor wenigen Jahren war man gezwungen, Elementargatter durch Schaltungen aus Einzelbauteilen (Elektronenröhren, Halbleiter, Kondensatoren, Widerstände, Verbindungsleitungen) standardisiert zu realisieren. Eine Verringerung der Anzahl von Elementargattern in Schaltungen bei gleichzeitiger Beibehaltung der Funktionsweise hatte daher in der Tat nachhaltigen Einfluß auf Kosten, Raumbedarf, Technologie u.a.m..

Für das Verständnis der heute von der "Schaltalgebra" zu lösenden Probleme ist es wichtig zu wissen, daß es der Stand der Mikroelektronik inzwischen erlaubt, auf "Platten" in mm- bis μm-Bereich durch bestimmte Technologien, wie z.B. Aufdampfen von Schichten, Fräsen von Kanälen etc., verschiedenartige physikalische Effekte, wie etwa wechselseitige p- und n-Übergänge, Induktionen, kapazitive Kopplungen u.a.m., auszunutzen und auf diese Weise höchstkomplizierte BOOLEsche Funktionen zu realisieren. Die Kosten derartiger Schaltungen werden im Gegensatz zur klassischen Röhren- oder Transistorschaltung nicht mehr durch die eigentliche Herstellung, d.h. u.a. durch Anzahl der Elementarbausteine und die Kompliziertheit der jeweils erneut zu fertigenden Verknüpfungen, sondern in erster Linie durch den Entwurf bestimmt.

Daher entscheidet der Automatisierungsgrad des Entwurfes von Mikroschaltungen wesentlich über den Gesamtaufwand.

Soweit es die Literatur und die bekannten Praktiken ausweisen (siehe z.B. /6, 1/), ist aber der Anteil "manueller" Arbeit beim Entwurf von Mikroschaltungen noch extrem hoch: Die Auswahl repräsentierender Ausdrücke zu vorgegebener BOOLEscher Funktion sowie der geometrische und elektronische Erstentwurf mikroelektronischer Realisierungen der entsprechenden Schaltungen erfolgen im wesentlichen "manuell" und unter Ausnutzung der Erfahrungen des Projektanten. Erst bei der Suche nach günstigen Anordnungen der Schichten, Wannen, Meander etc. auf (in) den Platten werden rechnergestützte Variantenvergleiche durchgeführt.

Zwar ist nicht abzusehen, ob und ggf. wann man von Mensch-Maschine-Kommunikationen beim Entwurf von Mikroschaltungen zu einer vollen Automatisierung übergehen kann, doch sind wir uns dessen sicher, daß es durch Untersuchungen geometrisch orientierter Kalküle möglich sein sollte, Verfahren zu finden, die es erlauben, mehrere der genannten Schritte algorithmisch zu beherrschen.

IV.

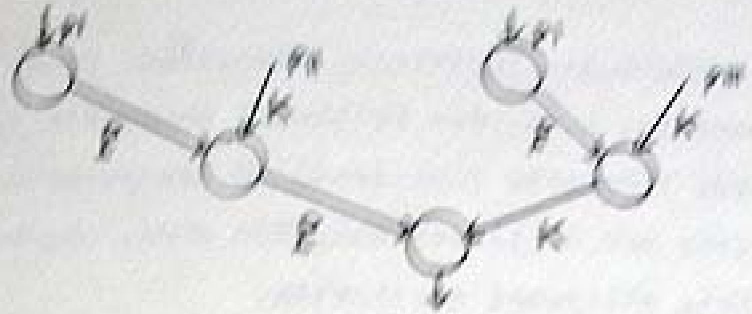
Sieht man von Nebensächlichkeiten ab und verwendet die bekannte Sprechweise der Graphentheorie, so stellt man fest, daß G. FREGE die zweiwertige Aussagenlogik formalisierte, indem er als sprachliche Gebilde alle und nur die endlichen gerichteten baumförmigen zweiwertigen G r a p h e n verwandte, die in wohlbestimmter Weise belegt sind. Die Zweiwertigkeit dieser Graphen soll heißen, daß in jeden Knoten höchstens zwei Kanten einmünden; als baumförmiger Graph hat jedes dieser Gebilde eine endliche Menge von Eingangskanten und genau eine Ausgangskante. Belegt wird ein derartiger Baum B, indem jede Eingangskante eindeutig auf eine Variable aus p.{I}* und die Eingangskanten von zweiwertigen Knoten jeweils eindeutig auf die Menge {P,K} ("Prämisse", "Konklusion") abgebildet werden. Die Interpretation f eines belegten Baumes B wird bei FREGE vorgenommen, indem den Eingangsvariablen Wahrheitswerte aus {0,1}, den einwertigen Knoten die Funktion non und den zweiwertigen Knoten die Funktion seq zugeordnet wird. Der Wert f(B) dieses Baumes bei der Interpretation f ist dann kanonisch durch sukzessive Substitution der Zwischenwerte in die nachfolgenden Funktionen bestimmt, wobei die Funktion seq(x_1,x_2) auf den Zwischenwert x_1 des jeweiligen P-Vorgängers und den Zwischenwert x_2 des K-Vorgängers in dieser Reihenfolge anzuwenden ist.

Zunächst mag der Eindruck entstehen, als habe es nur untergeordnete Bedeutung, daß die von FREGE gewählte Formalisierung der Aussagenlogik von dem in I) wiedergegebenen ("linearen") Kalkülbegriff abweicht, doch zeigt bereits ein Vergleich mit II), daß FREGEs Ausdrücke direkt als baumförmige Schaltungen in den Elementargattern G_{non} und G_{seq} aufgefaßt werden können. Einer Reihe von Untersuchungen der Schaltalgebra über semantisch äquivalente Umformungen von b a u m f ö r m i g e n S c h a l t u n g e n ist daher schon mit den umfangreichen Formelsammlungen FREGEs /5/ weit vorgegriffen worden, ohne die entsprechende Beachtung zu finden.

So ist z.B. der Ausdruck

$$\sim((p| \vee p||)\wedge\sim(p| \vee p|||))$$

zum Ausdruck aus Skizze 2 semantisch äquivalent.



Skizze 2

Der eigentliche Nutzen für die Forschungen auf dem Gebiet des Entwurfs von Mikroschaltungen besteht aber unseres Erachtens in der Idee, geometrisch orientierte Kalküle zu entwickeln und damit den Schaltungsentwurf einer algorithmischen Bearbeitung zugänglich zu machen.

Zu diesem Zwecke wird es erforderlich sein, m e t r i s i e r t e 2- bzw. 3-dimensionale Kalküle zu entwerfen, in denen, falls man dazu z.B. baumförmige Graphen heranzieht, spezifische Gebilde nur dann zulässig sind, wenn neben ihrer syntaktischen Korrektheit gesichert ist, daß Knoten in Abhängigkeit von ihrer Belegung einen vorgegebenen Mindest- (Höchst)abstand voneinander haben u.s.w.. Demzufolge werden hier in zweckentsprechender Weise gewisse Verhältnisse der Mikroschalttechnik abstrahiert:

1. Zu vorgegebenen Quader Q und vorgegebener BOOLEscher Funktion φ ist zu entscheiden, ob es einen z u l ä s s i g e n Graphen B mit $\varphi_B = \varphi$ gibt, der höchstens die Abmessungen von Q hat; im Falle seiner Existenz ist wenigstens ein derartiger Graph a l g o r i t h m i s c h zu konstruieren.

2. Es sind Abschätzungen für die erforderlichen M i n d e s t - a b m e s s u n g e n von Bäumen, die vorgegebene BOOLEsche Funktion repräsentieren, in Abhängigkeit von gewissen Kompli-

ziertheiten der BOOLEschen Funktionen anzugeben. Diese Aufgabe verlangt insbesondere, neue, den Problemen angepaßte Kompliziertheitsmaße für BOOLEsche Funktionen zu analysieren.
Mit Lösungen dieser und ähnlicher Aufgaben würde unseres Erachtens FREGEs Erbe zeitgemäß angetreten.

/1/ ALEKSENKO, A.G.: Osnowy mikroschemotechniki. Isd."Sowetskoe Radio", Moskwa 1971.

/2/ ASSER, G.: Einführungen in die Mathematische Logik, I,II. B.G. Teubner, Leipzig 1959, 1972.

/3/ CALDWELL, S.H.: Switching circuits and logical design. Wiley, N.Y., 1958.

/4/ FREGE, G.: Begriffsschrift. Verlag L. Nebert, Halle, 1879.

/5/ FREGE, G.: Grundgesetze der Arithmetik. Verlag H. Pohle, Jena, 1893.

/6/ ILJIN, W.N.: Maschinnoje projektirowanie elektronnych schem. Energia, Moskwa 1972.

/7/ LINDNER, R., K. WAGNER: Ob aksiomatisazii istschislenia posledowatelnostnych wyskasywanii (IPW) Probl. Kib.wyp.28, Isd. Nauka, Moskwa, 1974.

/8/ SCHRÖTER, K.: Was ist eine mathematische Theorie ? Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, 53, 69 - 82, 1943.

Verfasser: Prof. Dr. sc. Rolf Lindner
Sektion Mathematik der
Friedrich-Schiller-Universität
Jena